

УДК 519.248

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ n -КАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ НА ПОВЕДЕНИЕ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ

Т.Г. Минина, 3 курс

Научный руководитель – А.В. Капусто, к.физ-мат.н., доцент
Полоцкий государственный университет

Теория массового обслуживания – область прикладной математики, предметом изучения которой являются системы массового обслуживания (СМО). Структура СМО предполагает наличие некоторого числа обслуживающих устройств, которые иначе называют каналами обслуживания. Каждая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок, поступление которых на вход системы происходит в некоторые случайные моменты времени. Длительность процесса обслуживания заявки каналом также носит случайный характер. После удовлетворения поступившего требования канал освобождается и приступает к обслуживанию новой заявки, либо ждет поступления новой. Таким образом, случайный характер потока заявок и длительность их выполнения ведет к неравномерной загрузке СМО [2, с.104].

В качестве показателей эффективности функционирования СМО выступают: среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени; среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания обслуживания; вероятность отказа в обслуживании без ожидания; вероятность того, что число заявок в очереди превысит определенное значение и т.п.

Целью теории массового обслуживания является выработка оптимальных вариантов рационального построения СМО к организации их работы.

Именно для выполнения указанной цели и используется математическое моделирование СМО, связывающее заданные условия работы с показателями эффективности, обслуживающей системы, которая устанавливает зависимость между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективностью обслуживания с целью нахождения наилучших путей управления этими процессами.

По дисциплине обслуживания можно разделить СМО на два основных класса: СМО с отказами и СМО с ожиданием (очередью).

Остановимся на детальном рассмотрении функционирования n -канальной СМО с отказами. Пусть имеется n каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживания для одного канала имеет интенсивность μ . В случае, если все каналы заняты заявка, поступившая на обслуживание, получает отказ. Таким образом, СМО может находиться в одном из следующих состояний: S_0 – все каналы свободны; S_1 – занят ровно один канал, остальные свободны; ...; S_k – заняты ровно k каналов, остальные свободны; ...; S_n – заняты все n каналов. Переход системы из состояния S_k в состояние S_{k+1} происходит под воздействием входящего потока заявок $\Pi_{вх}$ с интенсивностью λ , а из состояния S_{k+1} в состояние S_k систему переводит поток обслуживания $\Pi_{об}$ с интенсивностью $(k+1)\mu$ $n = 0, n-1$.

Для наглядного представления связей между состояниями СМО и воздействиями потоков $\Pi_{вх}$ и $\Pi_{об}$ можно использовать граф состояний, рис. 1.

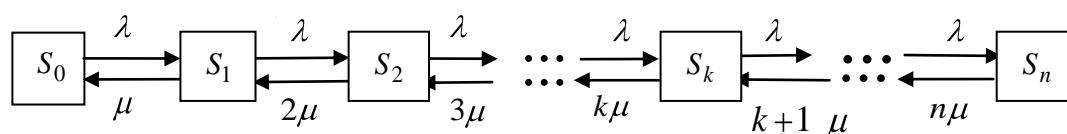


Рисунок – Граф состояний для многоканальной СМО с отказами

Пользуясь общим правилом для определения вероятностей состояний используют систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которая в данном случае носит название системы

дифференциальных уравнений Эрланга: [1, с. 51]. В начальный момент времени при $t = 0$ естественно считать, что СМО находится в состоянии S_0 , т.е. все каналы свободны. Установившийся стационарный режим функционирования СМО (при $t \rightarrow \infty$) представляют предельные вероятности состояний:

$$p_0 = \left(1 + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right)^{-1}, \quad p_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \cdot p_0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Так как в формулах (1) интенсивность потока заявок λ и интенсивность потока обслуживания μ входят своим отношением, то это отношение принято обозначать через ρ и называть приведенной интенсивностью входящего потока заявок или трафиком. Физический смысл трафика

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ состоит в том, что данная величина представляет собой среднее число заявок, приходящих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки и является показателем нагрузки системы. Единицей измерения этого показателя является эрланг.

Отметим, что среди основных характеристик эффективности СМО в первую очередь указывают вероятность отказа $P_{отк}$, относительную пропускную способность Q (вероятность того, что заявка будет принята к обслуживанию), абсолютную пропускную способность A (среднее число заявок, которые может обслужить СМО за единицу времени), среднее число заявок в системе $L_{сист}$ (в данном случае оно совпадает со средним числом занятых каналов). Использование указанных и других известных характеристик эффективности СМО позволяет рассчитать оптимальные параметры функционирования, в частности, определить оптимальное соотношение между $P_{вх}$ и $P_{отк}$, обеспечивающее максимальную загрузку каналов с минимизацией вероятности отказа по обслуживанию.

Проведенное исследование ставило своей целью оценку параметров эффективности функционирования n – канальной СМО в зависимости от дисциплины обслуживания. В связи с этим были проанализированы предельные вероятности состояний и значения показателей эффективности функционирования СМО, а также их соотношения для трех случаев: n – канальная СМО с отказами, n – канальная СМО с ограниченной очередью и n – канальная СМО с неограниченной очередью. Указанные характеристики СМО при одинаковых исходных параметрах в зависимости от дисциплины были просчитаны для различных значений числа каналов, интенсивности входящего потока и потока обслуживаний, числа мест в очереди.

Например, при $n = 6$, $\lambda = 8$, $\mu = 2$ и $m = 3$ (число мест в очереди), получены следующие результаты:

1) для СМО с отказами: $p_0 = 0,020595$, $p_1 = 0,08238$, $p_2 = 0,16476$, $p_3 = 0,21968$, $p_4 = 0,21968$, $p_5 = 0,175744$, $p_6 = 0,117162$, $p_{отк} = 0,117162$, $Q = 0,882838$, $A = 7,0627$, $L_{сист} = 3,53135$;

2) для СМО с очередью в три заявки: $p_0 = 0,01768$, $p_1 = 0,070719$, $p_2 = 0,141437$, $p_3 = 0,188583$, $p_4 = 0,188583$, $p_5 = 0,150867$, $p_6 = 0,100578$, $p_7 = 0,067052$, $p_8 = 0,044701$, $p_9 = 0,029801$, $p_{отк} = 0,029801$, $Q = 0,970199$, $A = 7,761594$, среднее число занятых каналов $\bar{K} = 4$, количество заявок в очереди $L_{оч} = 0,245857$, $L_{сист} = 4,245857$;

3) для СМО с ожиданием: $p_0 = 0,016658$, $p_1 = 0,066741$, $p_2 = 0,133482$, $p_3 = 0,177976$, $p_4 = 0,177976$, $p_5 = 0,142380$, $p_6 = 0,094920$, $p_7 = 0,06320$,

$$p_8 = 0,042187, \quad p_9 = 0,028125, \quad p_{10} = 0,018750, \quad p_{11} = 0,0125, \quad p_{12} = 0,008333, \\ p_{13} = 0,005555, \quad p_{14} = 0,003704, \quad \dots, \quad p_{отк} = 0, \quad Q = 1, \quad A = 8, \quad \bar{K} = 4, \\ L_{оч} = 0,569522, \quad L_{сисм} = 4,569522.$$

Отметим, что выполнение всех расчетов производилось в среде Ms Excel, что позволило запрограммировать вычисление числовых характеристик и рассмотреть влияние всех параметров на работу СМО.

Таким образом, исследования позволяют сделать следующие выводы:

- 1) все параметры функционирования n – канальной СМО оказывают влияние на характеристики эффективности ее функционирования;
- 2) увеличение количества каналов, при сохранении интенсивности входящего потока и интенсивности потока обслуживаний, увеличивает число занятых каналов, т.е. повышает производительность СМО;
- 3) увеличение интенсивности входящего потока, при сохранении числа каналов и интенсивности потока обслуживаний, повышает производительность СМО.

Вместе с тем отсутствие экономических показателей в абстрактной модели не позволяет оценить рентабельность работы СМО и дать практические рекомендации по ее усовершенствованию. Введение в модель СМО таких показателей и станет следующим этапом исследования.

Список использованных источников

1. Лабскер, Л.Б. Теория массового обслуживания в экономической сфере: учебное пособие для вузов / Л. Б. Лабскер, Л. О. Бабешко. – М: ЮНИТИ, 1998.- 319с.
2. Холод, Н.И. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие / Н.И. Холод, А.В. Кузнецов, Я.Н. Жихар и др. - Минск: БГЭУ, 2000.- 412с.